

AVALIAÇÃO NUMÉRICA DO COMPORTAMENTO SOLO-ESTACA PELOS MÉTODOS DE CONTORNO E DOS ELEMENTOS FINITOS

NUMERICAL EVALUATION OF SOIL-PILE BEHAVIOR BY THE BOUNDARY AND FINITE ELEMENT METHODS

Sérgio Takeo Oshima ⁽¹⁾

André Luis Christoforo ⁽²⁾

Cristiano Gabriel Persch ⁽³⁾

Túlio Hallak Panzera ⁽⁴⁾

Paulo Henrique Ribeiro Borges ⁽⁵⁾

Resumo

O presente trabalho apresenta uma formulação mista do Método dos Elementos de Contorno com o Método dos Elementos Finitos para a análise da interação solo-estaca em duas dimensões. Nesta formulação as estacas são modeladas através do Método dos Elementos Finitos como elementos de barra, e o solo, através do Método dos Elementos de Contorno, como um meio contínuo, elástico-linear, isótropo e homogêneo. São apresentados os sistemas de equações do solo e das estacas para elementos verticais e, a seguir, a combinação de ambos, originando um único sistema de equações. São apresentadas também as modificações necessárias para um sistema composto por estacas inclinadas. Após a resolução do sistema final, obtêm-se os deslocamentos e as tensões de contato solo-estaca. Um exemplo é apresentado e resolvido a partir da formulação aqui proposta, permitindo comparar os resultados obtidos com os resultados de modelos propostos por outros autores.

Palavras-chave: Equações diferenciais. Equações integrais. Interação solo-estaca. Métodos numéricos.

¹ Engenheiro Civil, Msc. em Engenharia de Estruturas, Departamento de Engenharia de estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo – EESC/USP, E-mail: stoshima@sc.usp.br

² Engenheiro Civil. Dr. em Engenharia de Estruturas, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de São João Del-Rei, UFSJ, E-mail: alchristoforo@ufsj.br.

³ Acadêmico de Engenharia Civil. Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal de Santa Maria, UFSM, E-mail: cristianog.persch@bol.com.br

⁴ Engenheiro Mecânico. Dr. em Engenharia Mecânica, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de São João Del-Rei, UFSJ, E-mail: panzera@ufsj.edu.br

⁵ Engenheiro Civil. Dr. em Engenharia Civil, Departamento de Engenharia Civil, Centro Federal de Educação Tecnológica, CEFET, E-mail: bianchini@ufsj.edu.br

Abstract

This paper presents a mixed formulation of the Boundary Element Method with the Finite Element Method for analysis of soil-pile interaction in two dimensions. In this formulation the piles are modeled using the Finite Element Method as bar elements and the soil, through the Boundary Element Method, as a continuous material, linear-elastic, isotropic and homogeneous. It presents the soil and pile equations to vertical elements and, then, the combination of both, creating a single system of equations. The changes needed for a system composed by inclined piles are also presented. After resolution of the final system, the displacements and strains of soil-pile contact are obtained. An example is presented and solved based on the formulation proposed here, allowing to compare the results with models proposed by other authors.

Keywords: *Differential equations. Integral equations. Soil-pile interaction. Numerical methods.*

1 Introdução

Atualmente a interação solo-estrutura tem sido um assunto muito discutido entre pesquisadores. O comportamento real de um sistema solo-estrutura é um assunto complexo, envolvendo muitas variáveis e hipóteses. Devido a tal dificuldade, uma solução promissora consiste na simulação numérica.

Com relação ao comportamento das estacas, um dos estudos pioneiros deve-se a Poulos e Davis (1968). Neste trabalho foi-se estudado o caso de uma estaca isolada, cilíndrica e incompressível, submetida à ação de uma carga axial, imersa em um meio semi-infinito, isotrópico e homogêneo. A tensão de cisalhamento ao longo da estaca foi admitida constante, tendo na base alongada apenas a tensão axial. Posteriormente, Poulos e Davis (1968) e Poulos e Madhav (1971) estendeu o trabalho para grupos de estacas, submetidas à ação de carregamentos horizontais e verticais.

Poulos e Madhav (1971) estudaram o problema de estacas isoladas e inclinadas, submetidas primeiramente a um carregamento axial e, posteriormente, a um carregamento horizontal, concluindo que os deslocamentos são praticamente independentes do ângulo de inclinação da estaca.

Com relação ao emprego do Método dos Elementos Finitos (MEF) e do Método Elementos de Contorno (MEC) na análise da interação solo estrutura, alguns trabalhos de

relevante contribuição podem ser citados, como os de Venturini e Brebbia (1984), Almeida (2003), Ribeiro (2005), Almeida e Paiva (2007), Mendonça e Paiva (2000), entre outros.

Neste trabalho, todo o equacionamento bem como a escolha das funções interpoladoras para os deslocamentos e forças de interação foram baseadas no trabalho proposto por Matos Filho (1999), desenvolvido para estacas verticais. Discretizando a estaca como um elemento de barra e utilizando várias funções polinomiais para representar os deslocamentos e forças de interação, Matos Filho (1999) chegou a um elemento final considerado eficiente, composto por 14 parâmetros nodais, sendo quatro deslocamentos lineares em cada uma das direções X_1 , X_2 e X_3 (Figura 1b) e mais dois parâmetros localizados na cabeça da estaca, referentes às rotações em torno dos eixos X_1 e X_2 . Os deslocamentos transversais ao longo da estaca foram aproximados por um polinômio do 4º grau e os deslocamentos axiais foram representados por uma função polinomial cúbica. As forças de interação referentes às direções X_1 e X_2 foram representadas por polinômios do 3º grau, sendo a força cisalhante ao longo do fuste ajustada por um polinômio quadrático. A tensão normal que ocorre na base da estaca é admitida constante.

2 Sistema de equações para o solo

O solo é modelado através do método dos elementos de contorno. A representação integral utiliza a solução fundamental de Mindlin (1936). Desprezando-se o efeito das forças de volume, pode-se escrever:

$$u_i = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(s,p) p_j(p) d\Gamma(p) \quad (i,j=1,2,3) \quad (1)$$

onde:

$u_{ij}^*(s,p)$ - é a solução fundamental de deslocamento com resposta em um ponto “p” (ponto campo), observado na direção “j”, devido a aplicação de uma força unitária concentrada no ponto “s” (ponto fonte) na direção “i”;

p_j - é a força de interação na direção “j”.

A Equação (1) pode ainda ser escrita como:

$$u_i = \sum_1^{N_e} \int_{\Gamma_c} u_{ij}^*(s,p) p_j(p) d\Gamma(p) \quad (i,j=1,2,3) \quad (2)$$

em que:

N_e - número de linhas de carga (estacas) imersas no meio contínuo;

Γ_e - é o contorno do elemento de contorno.

Neste trabalho, admite-se que na interface estaca-solo, as forças de contato nas direções X_1 e X_2 são linhas de carga ao longo das estacas. São adotados polinômios do 3º grau para aproximar as forças de interação nessas direções. Na direção X_3 o polinômio adotado é do 2º grau, conduzindo as funções de forma:

$$\begin{array}{cc} \text{Direção } X_1 \text{ e } X_2 & \text{Direção } X_3 \\ \bar{\phi} = \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{9}{2}\xi^3 + 9\xi^2 - \frac{11}{2}\xi + 1 \\ \frac{27}{2}\xi^3 - \frac{45}{2}\xi^2 + 9\xi \\ -\frac{27}{2}\xi^3 + 18\xi^2 - \frac{9}{2}\xi \\ \frac{9}{2}\xi^3 - \frac{9}{2}\xi^2 + \xi \end{Bmatrix} & \bar{\phi} = \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{9}{2}\xi^2 - \frac{9}{2}\xi + 1 \\ -9\xi^2 + 6\xi \\ \frac{9}{2}\xi^2 - \frac{3}{2}\xi \end{Bmatrix} \end{array} \quad (3)$$

com

$$\xi = \frac{z}{L} \quad (4)$$

em que:

ξ - coordenada adimensional;

z - cota do ponto em questão;

L - comprimento da estaca.

Efetuada numericamente as integrais indicadas na Equação (2) e utilizando a regra da quadratura de Gauss obtém-se o sistema de equações do solo, também chamado de equação geral dos deslocamentos, expressa por:

$$u_s = [G]^{-1} P_s \quad (5)$$

sendo:

$\{u_s\}$ - vetor dos deslocamentos do solo;

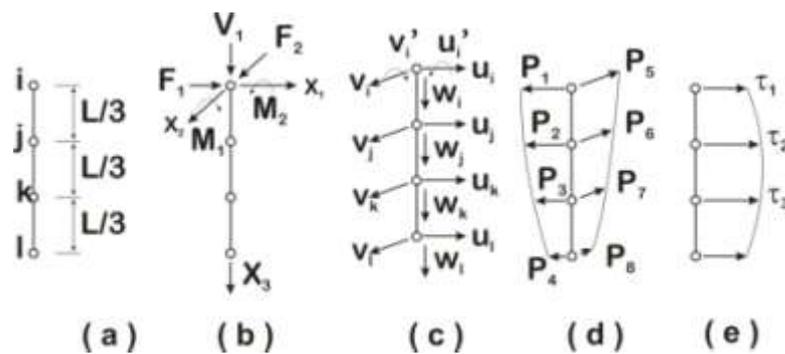
$[G]$ - matriz dos coeficientes de influência do solo;

$\{P_s\}$ - vetor das forças de interação do solo.

3 Sistema de equações para a estaca

A estaca é discretizada por um único elemento finito, contendo quatro nós (Figura 1), com deslocamentos transversais sendo aproximados por uma função polinomial de 4ª ordem e deslocamentos axiais aproximados por um polinômio cúbico.

FIGURA 1 - (a) Discretização do elemento; (b) Forças no topo do elemento; (c) Parâmetros nodais de deslocamento; (d) Forças de interação nas direções X_1 e X_2 ; (e) Forças de interação na direção X_3 .



As forças de interação na estaca nas direções X_1 , X_2 e X_3 são aproximadas respectivamente pelas Equações (9), (13), (16) e (17).

$$u_{ap}(z) = A_1 z^4 + B_1 z^3 + C_1 z^2 + D_1 z + E_1 \quad (6)$$

$$u'_{ap}(z) = 4 A_1 z^3 + 3 B_1 z^2 + 2 C_1 z + D_1 \quad (7)$$

$$u''_{ap}(z) = 12 A_1 z^2 + 6 B_1 z + 2 C_1 \quad (8)$$

$$PX_1(z) = A_2 z^3 + B_2 z^2 + C_2 z + D_2 \quad (9)$$

$$v_{ap}(z) = A_3 z^4 + B_3 z^3 + C_3 z^2 + D_3 z + E_3 \quad (10)$$

$$v'_{ap}(z) = 4 A_3 z^3 + 3 B_3 z^2 + 2 C_3 z + D_3 \quad (11)$$

$$v''_{ap}(z) = 12 A_3 z^2 + 6 B_3 z + 2 C_3 \quad (12)$$

$$PX_2(z) = A_4 z^3 + B_4 z^2 + C_4 z + D_4 \quad (13)$$

$$w_{ap}(z) = A_5 z^3 + B_5 z^2 + C_5 z + D_5 \quad (14)$$

$$w'_{ap}(z) = 3 A_5 z^2 + 2 B_5 z + C_5 \quad (15)$$

e

$$\tau_p(z) = A_6 z^2 + B_6 z + C_6 \quad (16)$$

$$\tau_b(z) = 1 \quad (17)$$

O funcional da energia potencial total é expresso por:

$$\begin{aligned} \Pi_{ap} = & \frac{E_p I_p}{2} \int_0^L u''_{ap}(z)^2 dz + \frac{E_p I_p}{2} \int_0^L v''_{ap}(z)^2 dz + \frac{E_p A_p}{2} \int_0^L w'_{ap}(z)^2 dz + \\ & + \int_0^L P_{X_1}(z) u_{ap}(z) dz + \int_0^L P_{X_2}(z) v_{ap}(z) dz + \int_0^L P_{X_3}(z) w_{ap}(z) dz + \\ & + \int_{A_p} \sigma_b w_1 dA_p - F_1 u_i - F_2 v_i - M_2 u'_i - M_1 v'_i \end{aligned} \quad (18)$$

em que:

E_p - o módulo de elasticidade longitudinal da estaca;

I_p - o momento de inércia da estaca;

A_p - área da seção transversal da estaca.

Minimizando o funcional da energia potencial total, ou seja, derivando-se a Equação (18) em relação aos parâmetros nodais e igualando-as a zero, obtém-se um sistema de equações lineares no sistema local de referencia, sendo expresso matricialmente pela Equação (19).

$$[K_c] \{u_p\} = \{F\} - [Q] \{P_p\} \quad (19)$$

em que:

$[K_c]$ - matriz de rigidez da estaca;

$\{u_p\}$ - vetor dos deslocamentos da estaca;

$\{F\}$ - vetor de forças nodais provenientes de carregamentos externos;

$[Q]$ - matriz de transformação de forças distribuídas em forças pontuais (nodais);

$\{P_p\}$ - vetor de forças de interação do solo.

4 Rotação do sistema

Toda a formulação desenvolvida no item anterior está relacionada a um sistema dextrorso, na qual um dos eixos principais foi tomado como o próprio eixo do elemento, entretanto, nos problemas de engenharia é comum encontrar elementos de fundação compostos por estacas com diferentes ângulos de inclinação entre si. Assim, torna-se

necessário adotar outro sistema de referência, comum a todas as partes pertencentes a um mesmo elemento de fundação.

Desta forma os elementos tomados em relação ao seu próprio eixo são relacionados ao sistema local de referência, apresentando um índice “L”, sendo relacionados ao sistema dextrorso XY, referenciados ao sistema global, apresentando um índice “G”.

Para relacionar os sistemas de coordenadas global e local faz-se necessário a adoção de uma matriz de transformação [R], expressa pela Equação (20).

$$\mathbf{R} \equiv \begin{bmatrix} \sqrt{CY^2 + CZ^2} & \frac{-CXC Y}{\sqrt{CY^2 + CZ^2}} & \frac{-CXC Z}{\sqrt{CY^2 + CZ^2}} \\ 0 & \frac{CZ}{\sqrt{CY^2 + CZ^2}} & \frac{-CY}{\sqrt{CY^2 + CZ^2}} \\ CX & \frac{CY}{\sqrt{CY^2 + CZ^2}} & \frac{CZ}{\sqrt{CY^2 + CZ^2}} \end{bmatrix} \quad (20)$$

sendo:

$$CX = \frac{x_1 - x_i}{L}; \quad Cy = \frac{y_1 - y_i}{L}; \quad Cz = \frac{z_1 - z_i}{L}; \quad (21)$$

Os índices “l” e “i” das coordenadas x, y e z fazem referência ao último e ao primeiro nó de uma mesma estaca e L representa o comprimento da mesma. Assim, podem-se relacionar os vetores de deslocamentos da seguinte forma:

$$\mathbf{u}_{sL} = \mathbf{R} \mathbf{u}_{sG} \quad \text{e} \quad \mathbf{P}_{sL} = \mathbf{R} \mathbf{P}_{sG} \quad (22)$$

ou

$$\mathbf{u}_{sG} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{u}_{sL} \quad \text{e} \quad \mathbf{P}_{sG} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{P}_{sL}$$

Nota-se que para estacas com grau de inclinação nulo (estacas verticais), $Cx = Cy = 0$, $Cz=1$ e $[R] = [I]$, ou seja, os sistemas de referência global e local se sobrepõem.

Desta forma, a Eq. (19) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$[K_c]_L \{u_p\}_L = \{F\}_L - [Q]_L \{P_p\}_L \quad (23)$$

Quanto a Equação (5), faz-se necessário rotacionar o vetor de deslocamentos para adequá-lo ao sistema de coordenadas locais (Equação (24)), uma vez que as equações de deslocamentos fundamentais são escritas em relação ao sistema global (Equação (25)).

$$\bar{\mathbf{u}}_s \bar{\mathbf{L}} = \bar{\Phi} \bar{\mathbf{L}} \bar{\mathbf{P}}_s \bar{\mathbf{L}} \quad (24)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{pmatrix}_g = \int_{\Gamma_e} \left[\begin{pmatrix} \mathbf{u}_{11} & \mathbf{u}_{12} & \mathbf{u}_{13} \\ \mathbf{u}_{21} & \mathbf{u}_{22} & \mathbf{u}_{23} \\ \mathbf{u}_{31} & \mathbf{u}_{32} & \mathbf{u}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{x1} & 0 & 0 \\ 0 & \phi_{x2} & 0 \\ 0 & 0 & \phi_{x3} \end{pmatrix} \right] d\Gamma \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{x1} \\ \mathbf{P}_{x2} \\ \mathbf{P}_{x3} \end{pmatrix}_g \quad (25)$$

A Equação (25), escrita em notação compacta, é expressa pela Equação (26).

$$\bar{\mathbf{u}}_s \bar{\mathbf{G}} = \bar{\Psi}^* \bar{\Phi} \bar{\mathbf{P}}_s \bar{\mathbf{G}} \quad (26)$$

Substituindo a Equação (22) na Equação (26),

$$\bar{\mathbf{R}} \bar{\mathbf{L}} \bar{\mathbf{u}}_s \bar{\mathbf{L}} = \bar{\Psi}^* \bar{\Phi} \bar{\mathbf{R}} \bar{\mathbf{L}} \bar{\mathbf{P}}_s \bar{\mathbf{L}} \quad (27)$$

Isolando-se o termo $\{\mathbf{u}_s\}_L$ da equação (27) e lembrando que $[\mathbf{R}]^{-1} = [\mathbf{R}]^T$ chega-se a matriz de coeficientes de influência do solo, escrita no sistema de coordenadas locais, representada na Equação (29).

$$\bar{\mathbf{u}}_s \bar{\mathbf{L}} = \bar{\mathbf{R}} \bar{\Psi}^* \bar{\Phi} \bar{\mathbf{R}} \bar{\mathbf{L}} \bar{\mathbf{P}}_s \bar{\mathbf{L}} \quad (28)$$

$$\bar{\Phi} \bar{\mathbf{L}} = \bar{\mathbf{R}} \bar{\Psi}^* \bar{\mathbf{R}} \bar{\mathbf{L}} \bar{\Phi} \quad \text{ou} \quad \bar{\Phi} \bar{\mathbf{L}} = [\mathbf{R}] [\mathbf{G}]_G [\mathbf{R}]^T \quad (29)$$

De posse da equação geral de deslocamentos do MEC e da equação do MEF faz-se necessário realizar o acoplamento entre os dois sistemas de equações.

Isolando-se as forças de interação na Equação (24) chega-se a:

$$\bar{\mathbf{P}}_s \bar{\mathbf{L}} = \bar{\Phi} \bar{\mathbf{L}}^{-1} \bar{\mathbf{u}}_s \bar{\mathbf{L}} \quad (30)$$

Realizando a compatibilidade de deslocamentos e equilíbrio na interface solo-estaca, isto é:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}}_s \bar{\mathbf{L}} &= \bar{\mathbf{u}}_p \bar{\mathbf{L}} \\ \bar{\mathbf{P}}_s \bar{\mathbf{L}} + \bar{\mathbf{P}}_p \bar{\mathbf{L}} &= 0 \end{aligned} \quad (31)$$

Pode-se substituir a Equação (30) na Equação (23):

$$[K_c]_L \{u_p\}_L = \{F\}_L - [T] \{u_s\} \quad (32)$$

em que:

$$[T]_L = [Q]_L [G]_L^{-1} \quad (33)$$

Necessita-se agora expandir a matriz $[T]_L$ para se obter a mesma ordem da matriz $[K_c]_L$. Esse procedimento é realizado inserindo duas colunas de zeros a partir da terceira coluna na matriz $[T]_L$, referentes a não consideração da rotação em torno dos eixos X_1 e X_2 pelo solo. Após a sua expansão, a matriz $[T]_L$ passa a ser chamada de matriz $[M]_L$. Assim, é necessário também expandir o vetor de deslocamentos do solo, sendo denominado por $\{U\}_L$, isto é:

$$\{U\}_L^T = \{u_i \ v_i \ w_i \ u_i' \ v_i' \ u_j \ v_j \ w_j \ u_k \ v_k \ w_k \ u_l \ v_l \ w_l\} \quad (34)$$

$$([K_c]_L + [M]_L) \bar{U}_L = \bar{F}_L \quad (35)$$

Simplificando a equação (35) chega-se a equação (36),

$$K_L \bar{U}_L = \bar{F}_L \quad (36)$$

onde:

$[K]_L$ - matriz final do sistema MEC/MEF no sistema local;

$\{U\}_L$ - vetor de deslocamentos da estaca no sistema local;

$\{F\}_L$ - vetor de forças nodais provenientes de carregamentos.

Trabalhando no sistema de referência global a Equação (36) fica:

$$K_G \bar{U}_G = \bar{F}_G \quad (37)$$

em que:

$$K_G = \beta^T K_L \beta \quad (38)$$

com:

$$\mathbf{d}_{14 \times 14}^- = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{3 \times 3}^- & 0 & 0 & \mathbf{d}_{3 \times 3}^- & \mathbf{d}_{3 \times 3}^- & \mathbf{d}_{3 \times 3}^- \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{d}_{3 \times 3}^- & 0 & 0 & \mathbf{R}_{3 \times 3}^- & \mathbf{d}_{3 \times 3}^- & \mathbf{d}_{3 \times 3}^- \\ \mathbf{d}_{3 \times 3}^- & 0 & 0 & \mathbf{d}_{3 \times 3}^- & \mathbf{R}_{3 \times 3}^- & \mathbf{d}_{3 \times 3}^- \\ \mathbf{d}_{3 \times 3}^- & 0 & 0 & \mathbf{d}_{3 \times 3}^- & \mathbf{d}_{3 \times 3}^- & \mathbf{R}_{3 \times 3}^- \end{bmatrix} \quad (39)$$

5 Grupo de estacas

O sistema de equações pra um grupo de estacas é bastante semelhante ao sistema de uma estaca isolada. A grande diferença está na ordem das matrizes envolvidas. De uma maneira simplificada pode-se descrever todo processo partindo do sistema final de uma estaca isolada, mudando-se apenas a ordem das matrizes envolvidas.

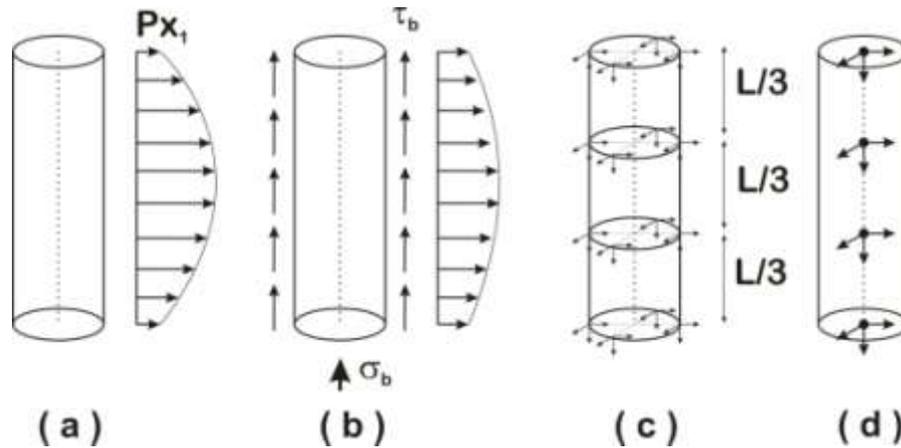
Assim como nos trabalhos de Poulos e Davis (1968) e Poulos e Madhav (1971), aqui se considerada a superposição elástica da influência de todos os elementos do grupo, sempre tomados dois a dois, ou seja, o sistema final é representado por vários subsistemas que, por sua vez, representam a interação de duas estacas e o solo, ou a influencia de uma estaca sobre ela mesma.

Entretanto, foram feitas algumas considerações para esse modelo:

A influência de uma estaca sobre si mesma é feita através de uma integração numérica, usando a regra da quadratura de Gauss, com os pontos fonte situados no eixo da estaca e os pontos campos no contorno da mesma, garantindo assim que a menor distância entre os pontos “s” e “p” seja igual ao próprio raio da estaca (Figura 2c).

A influência entre estacas diferentes também é calculada através integração numérica usando a regra da quadratura Gaussiana com os pontos “s” e “p” dispostos nos eixos das diferentes estacas (Figura 2d).

FIGURA 2 - (a) Força de interação na direção X_1 e X_2 ; (b) Força de interação na direção X_3 ; (c) Pontos campo em estaca isolada ; (d) Pontos campo em grupo de estacas.



Dessa forma, para a interação entre duas estacas tem-se que:

$$[K]_{28 \times 28} \{u_p\}_{28 \times 1} = \{F\}_{28 \times 1} - [Q]_{28 \times 28} [G]^{-1}_{28 \times 24} \{u_s\}_{24 \times 1} \quad (40)$$

onde:

$$G^{-1}_{28 \times 24} = \begin{bmatrix} MEC_{11}^{-1} & MEC_{12}^{-1} \\ MEC_{21}^{-1} & MEC_{22}^{-1} \end{bmatrix} \quad (41)$$

- MEC_{11} Representa os coeficientes de rigidez provenientes do solo relativos a influencia da estaca 1 sobre ela mesma;
- MEC_{12} Representa os coeficientes de rigidez provenientes do solo relativos a influencia da estaca 1 sobre a estaca 2;
- MEC_{21} Representa os coeficientes de rigidez provenientes do solo relativos a influencia da estaca 2 sobre a estaca 1;
- MEC_{22} Representa os coeficientes de rigidez provenientes do solo relativos a influencia da estaca 2 sobre ela mesma.

$$K^{-1}_{28 \times 28} = \begin{bmatrix} MEF_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & MEF_{22}^{-1} \end{bmatrix} \quad (42)$$

- MEF_{11} Representa os coeficientes de rigidez provenientes da estaca relativos a influencia da estaca 1 sobre ela mesma;
- MEF_{22} Representa os coeficientes de rigidez provenientes da estaca relativos a influencia da estaca 2 sobre ela mesma;

$$Q^{-1}_{28 \times 24} = \begin{bmatrix} Q_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & Q_{22}^{-1} \end{bmatrix} \quad (43)$$

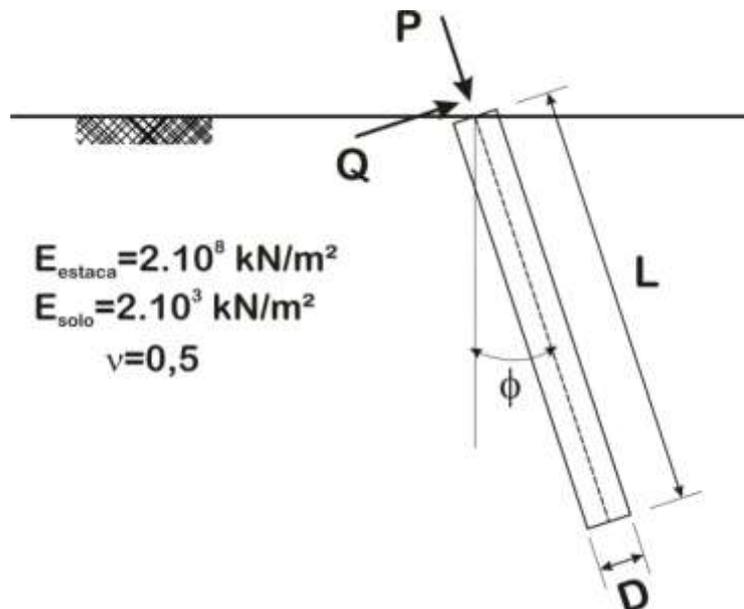
- Q_{11} Coeficientes das forças de interação na estaca 1;
 Q_{22} Coeficientes das forças de interação na estaca 2.

Para um grupo com mais de duas estacas, o procedimento padrão é o mesmo, bastando apenas montar as matrizes considerando cada estaca isolada e as matrizes das interações entre uma estaca e as demais, sempre tomadas dois a dois, e inserindo-as na matriz do sistema final.

6 Exemplo numérico

A figura 3 ilustra o caso de uma estaca isolada de comprimento L e diâmetro D . A estaca apresenta um ângulo de inclinação ϕ , estando submetida à ação de duas forças concentradas P e Q , ambas de intensidade 1000 kN. O módulo de elasticidade adotado para a estaca é $E_{estaca} = 2 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$ e o módulo de elasticidade para o solo e o seu coeficiente de Poisson são respectivamente iguais a $E_{solo} = 2 \cdot 10^3 \text{ kN/m}^2$ e $\nu = 0,5$.

FIGURA 3 - Estaca submetida à ação de forças pontuais P e Q .



Neste exemplo apresentam-se os resultados dos deslocamentos para os carregamentos P e Q agindo isoladamente. As tabelas 1 e 2 apresentam os deslocamentos na cabeça da estaca referente à atuação do carregamento axial, e as tabelas 3 e 4 referentes à atuação do

carregamento normal. Em ambas as análises foram verificados os deslocamentos para estacas verticais ($\phi=0^\circ$) e inclinadas ($\phi=30^\circ$), sendo a inclinação de 30° graus comumente utilizada em projetos, variando-se também a relação L/D, permitindo comparar os resultados obtidos com os advindos do trabalho de Poulos e Madhav (1971).

TABELA 1 - Deslocamentos axiais na cabeça da estaca devido ao carregamento P .

L / D	Deslocamentos (cm)			
	$\phi = 0^\circ$		$\phi = 30^\circ$	
	Poulos & Madhav	Este Modelo	Poulos & Madhav	Este Modelo
10	0.175000	0.183795	0.174996	0.182090
25	0.124000	0.127594	0.126869	0.126869
100	0.063500	0.065147	0.064982	0.064982

TABELA 2 - Deslocamentos transversais na cabeça da estaca devido ao carregamento P .

L / D	Deslocamentos (cm)			
	$\phi = 0^\circ$		$\phi = 30^\circ$	
	Poulos & Madhav	Este Modelo	Poulos & Madhav	Este Modelo
10	0.000000	0.000000	0.000005	-0.007931
25	0.000000	0.000000	0.000004	-0.004104
100	0.000000	0.000000	0.000003	-0.000248

TABELA 3 - Deslocamentos axiais na cabeça da estaca devido ao carregamento Q .

L / D	Deslocamentos (cm)			
	$\phi = 0^\circ$		$\phi = 30^\circ$	
	Poulos & Madhav	Este Modelo	Poulos & Madhav	Este Modelo
10	0.000000	0.000000	0.000000	-0.004452
25	0.000000	0.000000	0.000000	-0.002880
100	0.000000	0.000000	0.000000	-0.000354

TABELA 4 - Deslocamentos transversais na cabeça da estaca devido ao carregamento Q .

L / D	Deslocamentos (cm)			
	$\phi = 0^\circ$		$\phi = 30^\circ$	
	Poulos & Madhav	Este Modelo	Poulos & Madhav	Este Modelo
10	0.424625	0.390540	0.424616	0.399235
25	0.331533	0.307868	0.331526	0.312206
100	0.358500	0.340601	0.358492	0.340703

Nesta primeira análise, nota-se claramente que cargas axiais praticamente geram apenas deslocamentos axiais, visto que os mesmos são praticamente independentes do ângulo de inclinação da estaca.

Comparando-se os resultados obtidos, nota-se que há grande concordância entre os dois modelos. A maior discrepância ocorre nos deslocamentos transversais, porém, através de uma análise mais detalhada nota-se que os valores de deslocamentos normais obtidos através do modelo em estudo são da ordem de 4 % dos valores dos deslocamentos axiais, diminuindo na medida em que se aumenta a relação L/D, tendendo a um valor próximo a zero.

Analisando os resultados em deslocamentos provocados pela ação do carregamento Q , chega-se a conclusão de que os deslocamentos praticamente independem do ângulo de inclinação da estaca. Assim, de maneira simples podem-se estimar os deslocamentos de uma estaca inclinada em função dos resultados obtidos para uma estaca vertical.

7 Conclusões

Neste trabalho foi apresentada uma formulação numérica híbrida MEC/MEF para a análise da interação solo-estaca.

Pelos resultados obtidos na simulação do problema, o modelo proposto apresentou boa concordância com os resultados encontrados no trabalho de Poulos e Madhav (1971).

Do exemplo avaliado, mediante a variação da posição da estaca e das relações L/D adotadas, percebe-se que o comportamento das estacas isoladas inclinadas é próximo ao das estacas isoladas verticais, assim como esperado.

O programa desenvolvido permite avaliar o comportamento de estacas inclinadas ou não, mostrando-se como metodologia alternativa a ser utilizada na construção de ábacos para a determinação direta da influência da inclinação da estaca nas suas deslocabilidades.

8 Referências

- ALMEIDA, V. S. **Análise da interação solo não-homogêneo/estrutura via acoplamento MEC/MEF**. Tese de Doutorado. Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003.
- ALMEIDA, V. S.; PAIVA, J. B. **A mixed BEM-FEM formulation for layered soil superstructure interaction**. Cadernos de Engenharia de Estruturas, v. 9, n. 38, p. 63-82, 2007.
- MATOS FILHO, R. F. **Análise da interação estaca-solo via combinação do método dos elementos finitos com o método dos elementos de contorno**. Dissertação de Mestrado. Escola de Engenharia de São Carlos – Universidade de São Paulo, São Carlos, 116 p, 1999.
- MENDONÇA, A. V.; PAIVA, J. B. **A boundary element method for the static analysis of raft foundations on piles**. Engineering Analysis with Boundary Elements, v. 24, p. 237-247, 2000.
- MINDLIN, R. D. **Force at a point in the interior of a semi-infinite solid**. Physics 7, p.195-2002, 1936.
- POULOS, H. G.; DAVIS, E. H. **The settlement behavior of single axially loaded incompressible piles and piers**. Geotechnique, vol 18, p. 351-371, 1968.
- POULOS, H. G. **Analysis of the settlement of piles groups**. Geotechnique, vol 18, p. 449-471, 1968.
- POULOS, H. G. **Behavior of laterally loaded piles I-Single piles**. Journal of the soil mechanics and foundations division, ASCE, vol 97, s.SM5, p. 771-731, 1971.
- POULOS, H. G. **Behavior of laterally loaded piles II-Piles groups**. Journal of the soil mechanics and foundations division, ASCE, vol 97, s.SM5, p. 733-751, 1971.
- POULOS, H. G.; MADHAV, M. R. **Analysis of the movement of battered piles**. Proc. 1st Aus. N.Z. Conf. On. Geomechanics, Melbourne, p. 268-275, 1971.
- RIBEIRO, D. B. **Análise da interação solo-estrutura via acoplamento MEC-MEF**. Dissertação de Mestrado. Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo, São Carlos, 2005.
- VENTURINI, W. S.; BREBBIA, C. A. **Boundary Element Formulation for Nonlinear Application in Geomechanics**. Applied Mathematical Modelling, v. 8, p. 251-260, 1984.