AVALIAÇÃO DOS DESLOCAMENTOS EM VIGAS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

EVALUATION OF THE DISPLACEMENTS IN BEAMS BY THE FINITE ELEMENT METHOD

Anelize Borges Monteiro [(1)]
Anderson Renato Vobornik Wolensky [(2)]
André Luis Christoforo [(3)]

Resumo

Os métodos analíticos clássicos permitem o cálculo da solução exata de deslocamentos, deformações e tensões na estrutura nos seus infinitos pontos. Entretanto, essas soluções são apenas conhecidas para alguns casos, que fogem da maioria das aplicações práticas. O Método dos Elementos Finitos (MEF) é um procedimento aproximado que foi desenvolvido para aplicação em caráter geral, independente da forma da estrutura e da condição de carregamento, dentro da precisão aceitável do problema de Engenharia. Neste sentido, o deslocamento em problemas estruturais elásticos é tido como incógnita fundamental e com o emprego do MEF é possível descrever, através do conhecimento dos deslocamentos nos nós, o comportamento interno de cada elemento. Quanto mais especificado for esse comportamento interno, mais a resposta do modelo irá se aproximar do comportamento real da estrutura. Neste contexto, este trabalho objetivou solucionar um problema de viga sujeita a ação de forças distribuídas com o emprego do MEF através de funções polinomiais interpolativas do terceiro (usual) e quinto (alternativa) graus e comparar os resultados obtidos com os calculados pela solução analítica, de maneira a se comparar as diferenças entre os deslocamentos gerados por ambas as aproximações, a usual e a alternativa, aqui propostas.

Palavras chaves: Mecânica dos sólidos. Soluções aproximadas. Solução analítica.

---

[1] Acadêmica de Engenharia Civil, Departamento de Engenharia de Estruturas, Universidade Federal de Minas Gerais, UFMG, E-mail: anelize@dees.ufmg.br
[2] Acadêmico de Engenharia Civil, Departamento de Engenharia de Estruturas, Universidade Federal de Minas Gerais, UFMG, E-mail: anderson@dees.ufmg.br
[3] Engenheiro Civil, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de São João Del-Rei, UFSJ, E-mail: alchristoforo@ufsj.edu.br

Abstract

The classical analytical methods allow the exact solution calculation of displacements, strains and stresses on the structure on its infinite points. However, these solutions are just known for some cases that diverge of the majority of practical applications. Finite Element Method (FEM) is an approximate procedure which had been developed to the application in general character, structure shape and loading condition independent, within the acceptable precision of the Engineering problem. In this sense, displacement in structural problems is the fundamental unknown and with the use of FEM is possible to describe, through the known displacements on the nodes, the internal behavior of each element. The more specified this internal behavior more the model response will approach the actual structure behavior. In this context, this work aimed to solve a problem of beam subjected to the action of distributed forces with the use of the FEM through interpolative polynomial functions of third (usual) and fifth (alternative) degrees and to compare the obtained results with the ones calculated by the analytical solution, in order to compare the differences between the displacements generated by both approaches, the usual and the alternative proposed here.

Keywords: *Solid mechanics. Approximate solutions. Analytical solution.*

Introdução

O deslocamento em problemas estruturais elásticos é tido como incógnita fundamental. A avaliação de esforços e deslocamentos em estruturas depende, principalmente, do comportamento dos materiais que compõem estes elementos e das cargas externas atuantes. A importância do cálculo dos deslocamentos em estruturas é evidenciada em virtude dos denominados Estados Limites. Estes são os critérios de segurança adotados para os projetos de estruturas e são caracterizados por serem estágios a partir dos quais a estrutura apresenta desempenho impróprio aos fins previamente projetados. Desta maneira, as estruturas são analisadas e calculadas com o uso de coeficientes parciais de segurança que têm como objetivo suprir todas as incertezas possíveis inerentes às variáveis de projeto. No quesito confiabilidade, um estado limite corresponde à fronteira entre o desempenho desejado e indesejado da estrutura, isto é, uma função matemática que define se as estruturas oferecem riscos de falhas ou não.

A função de deslocamentos em estruturas do tipo viga é obtida mediante a resolução de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO). Em função da complexidade e trabalho algébrico que algumas apresentam, torna-se imprescindível o emprego de métodos numéricos, como o Método das Diferenças Finitas, o Método dos Elementos Finitos Generalizados, os Métodos sem Malha e o Método dos Elementos de Contorno.

Dentre tais métodos, destaca-se o Método dos Elementos Finitos (MEF), que permite realizar análises estruturais de grande complexidade, considerando milhares de tipos estruturais e graus de liberdade. No modelo de deslocamentos do MEF, o domínio do problema é dividido em subdomínios de dimensões finitas (elementos finitos), em que o campo de deslocamentos é arbitrado. Sendo escrito o campo de deslocamentos dos elementos em relação aos deslocamentos dos nós, é obtido um sistema de equações algébricas que, quando resolvido, permite solucionar o problema. Oñate (1995) afirma que o MEF é o procedimento mais potente para a análise de estruturas de caráter uni, bi e tridimensionais submetidas a diversas ações externas. O autor destaca que uma das etapas fundamentais na aplicação do MEF no cálculo estrutural é a implentação da teoria em um programa computacional eficiente e por essa razão, e também por conta da crescente competitividade no mercado de cálculo por elementos finitos, nos últimos anos esforços consideráveis têm sido realizados no sentido de se desenvolver programas versáteis e eficazes, que permitam a obtenção de soluções de MEF de maneira mais econômica e competitiva.

Nestes aspectos, este trabalho objetivou a aplicação do MEF com o uso de funções polinomiais interpoladoras do terceiro (metodologia usual) e quinto (metodologia alternativa) graus na determinação aproximada da função de deslocamentos em um problema de viga com solução analítica conhecida, de maneira a se comparar as diferenças entre os deslocamentos gerados por ambas às aproximações, a usual e a alternativa aqui proposta.

Problema modelo

Com o intuito de apresentar o problema modelo proposto para este trabalho e para enfatizar as análises que serão feitas posteriormente, é indispensável o desenvolvimento da equação diferencial da linha elástica bem como a sua solução. Neste aspecto, uma viga sob flexão se deforma em relação à sua posição inicial. A curva do eixo da viga define a linha elástica cuja equação possibilita determinar o deslocamento transversal ou flecha e o deslocamento angular

ou giro de qualquer ponto ao longo do seu domínio, assim como ilustra a Figura 1, em que $\boldsymbol{x}$ representa o comprimento de interesse da viga no ponto a ser analisado, a partir de um referencial, $\boldsymbol{v(x)}$ denota a função deslocamento da viga, $\boldsymbol{\theta(x)}$ expressa à função da rotação ao longo da viga, $\boldsymbol{L}$ representa o vão entre apoios e $\boldsymbol{r}$ representa o raio da curvatura.

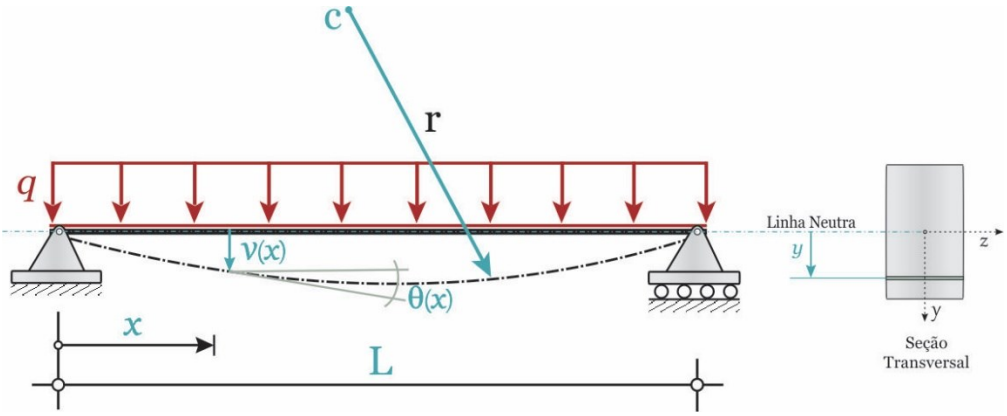

Figura 1. Viga biapoiada fletida e a linha elástica advinda de sua deformada.

A referida função da rotação, observada anteriormente na Figura 1, é expressa pela derivada primeira dos deslocamentos, ou seja, $\theta(x) = \frac{dv(x)}{dx}$. Em se tratando da definição matemática em torno desta consideração, partindo dos princípios da geometria diferencial no que tange os conceitos sobre curvatura de funções e, admitindo a analogia destes conceitos com a configuração deformada da viga, obtém-se a Equação 1, que determina a curvatura $\frac{1}{r}$:

$$\frac{1}{r} = \frac{\frac{d^2v}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \tag{1}$$

Admitindo-se pequenas deformações, o termo $\left(\frac{dv}{dx}\right)^2$ pode ser desprezado em relação à unidade. A Equação 1 pode ser reescrita, assim como expressa a Equação 2.

$$\frac{1}{r} = \frac{d^2v}{dx^2} \tag{2}$$

A lei de Hooke para elementos unidimensionais é expressa pela Equação 3:

$$\sigma = E\varepsilon \tag{3}$$

em que E é o módulo de elasticidade, $\boldsymbol{\varepsilon}$ representa a deformação e σ a tensão.

Na flexão normal de barras, a tensão e a deformação (Figura 1) são descritas, respectivamente, pelas Equações 4 e 5, sendo $M(x)$ o momento fletor, I_z o momento de inércia à flexão em relação ao eixo z, y a distância entre a fibra longitudinal de interesse e a linha neutra e r o raio da curvatura.

$$\sigma = \frac{M(x)}{I_z} y \tag{4}$$

$$\varepsilon = \frac{y}{r} \tag{5}$$

Substituindo-se as Equações 4 e 5 na Equação 3 e comparando este resultado com a Equação 2, chega-se à equação diferencial que permite determinar os deslocamentos e, consequentemente, as rotações em vigas, sendo estas expressas pela Equação 6.

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI_z} \tag{6}$$

O produto $E.Iz$, denominado rigidez contra flexão, é sempre positivo, de modo que $M(x) > 0$ implica em tração nas fibras inferiores e $v > 0$ no deslocamento orientado para baixo (Figura 1). Assim, $M(x) > 0$ resulta $\frac{d^2v}{dx^2} < 0$, sendo necessário acrescentar o sinal negativo nesta equação, uma vez que os sinais de $M(x)$ e da derivada $\frac{d^2v(x)}{dx^2}$ devem ser coerentes.

O problema modelo aqui proposto trata-se de uma viga isostática solicitada por um carregamento uniformemente distribuído q, como ilustra a Figura 2. Os valores definidos para as variáveis estruturais de interesse são: $E = 15.000\, kN/cm^2$, $I_z = 1.152\, cm^4$, $q = 1\, kN/cm$ (intensidade do carregamento distribuído) e $L = 200\, cm$ (vão da viga).

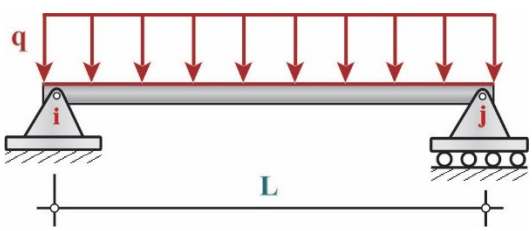

Figura 2. Problema modelo: viga biapoiada de comprimento L, solicitada por um carregamento linearmente distribuído q.

A função momento fletor para este problema é apresentada na Equação 7, tomando-se o apoio fixo como origem para o referencial adotado (Figura 2).

$$M(x) = \frac{q}{2}(-x^2 + Lx) \tag{7}$$

Substituindo-se a Equação 7 na Equação 6 e integrando-a duas vezes sucessivamente, chega-se à solução geral desta EDO. A solução particular (Equação 8) é encontrada mediante a imposição das duas condições de contorno essenciais ao problema, o que implica na nulidade dos deslocamentos sobre os apoios, matematicamente traduzidas por $v(x = 0) = 0$ e $v(x = L) = 0$, sendo a origem do eixo x definida sobre o apoio fixo, assim como realizado para a função momento fletor.

$$v(x) = \frac{qx}{12EI_z}\left(\frac{x^3}{2} - Lx^2 + \frac{L^3}{2}\right) \tag{8}$$

A Figura 3 ilustra geometricamente a forma deslocada do problema modelo.

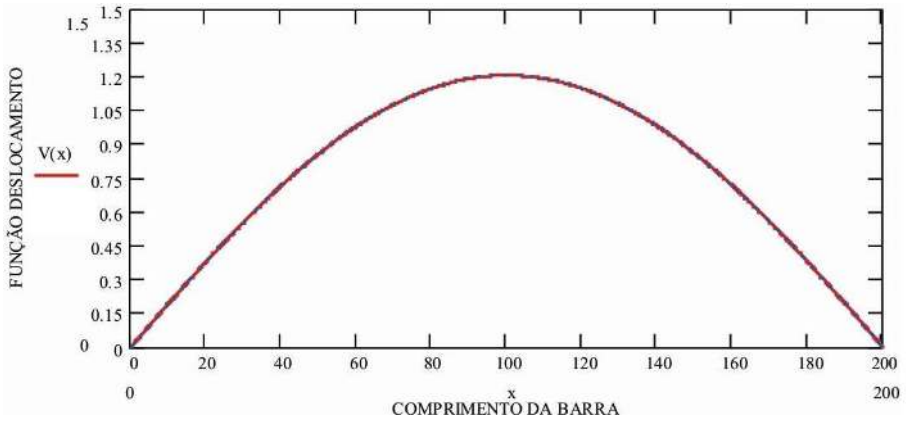

Figura 3. Forma deslocada do problema modelo a partir da função analítica.

A função analítica para o problema modelo é utilizada para verificar a eficiências das aproximações geradas segundo o emprego do MEF com o uso das funções polinomiais interpoladoras de graus três e cinco.

Método dos elementos finitos

O Método dos Elementos Finitos (MEF) mostra-se como uma excelente ferramenta utilizada para analisar o comportamento de estruturas. Historicamente, o MEF surgiu em 1955, como evolução da análise matricial de modelos reticulados, motivado pelo advento do computador e elaborado com o intuito de se projetar estruturas de modelos contínuos.

O MEF pode ser considerado como uma técnica de gerar funções de aproximação, que podem ser utilizadas para interpolar deslocamentos, esforços, tensões e deformações ao longo do domínio do elemento.

Para a resolução de problemas estruturais segundo o MEF, as funções de forma podem ser aplicadas diretamente a sua equação diferencial (Resíduos Ponderados) ou a princípios energéticos, tais como o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV).

O deslocamento em problemas estruturais elásticos é tido como incógnita fundamental, obtido por intermédio da resolução de um sistema de equações lineares, assim como expressa a Equação 9, sendo que a sua construção fica em função da disposição da malha e, consequentemente, dos nós dos elementos finitos na estrutura, como pode ser visto na Figura 4.

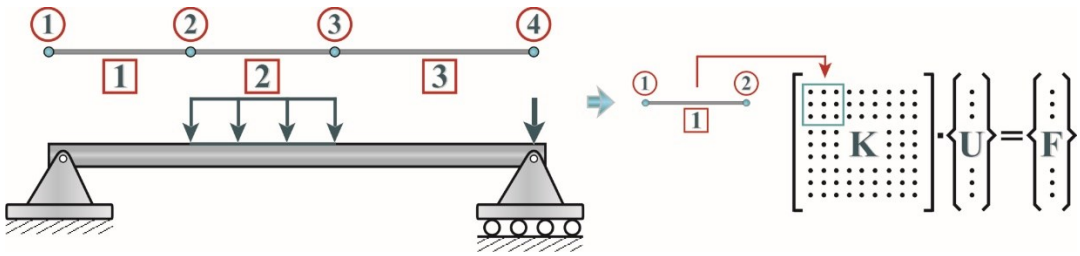

Figura 4. Exemplo de discretização de uma viga via MEF. Os números nos círculos representam os nós e os nos quadrados numeram os elementos finitos.

$$[K]\{U\} = \{F\} \tag{9}$$

Da Equação 9, $[K]$ denota a matriz de rigidez da estrutura, $\{U\}$ o vetor dos deslocamentos nodais da estrutura e $\{F\}$ o vetor das forças equivalentes nodais da estrutura.

Com relação ao emprego do MEF na engenharia de estruturas, alguns trabalhos podem ser citados tais como o de Alvarenga e Antunes (1994), Cheung e Lindquist (2004), Christoforo (2007), Góes (2004), Mascia (1991), Rigo (1999) entre outros.

Formulação do elemento finito

O elemento finito tem o seu desenvolvimento mediante a aplicação das funções de forma (geradas pela técnica dos elementos finitos) no Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV), reescrito para o problema de vigas. Em posse deste preceito, são obtidos a matriz de rigidez e o vetor das forças equivalentes nodais para cada função interpolativa.

Para as variáveis contidas na Figura 5, o PTV se escreve conforme a Equação (10):

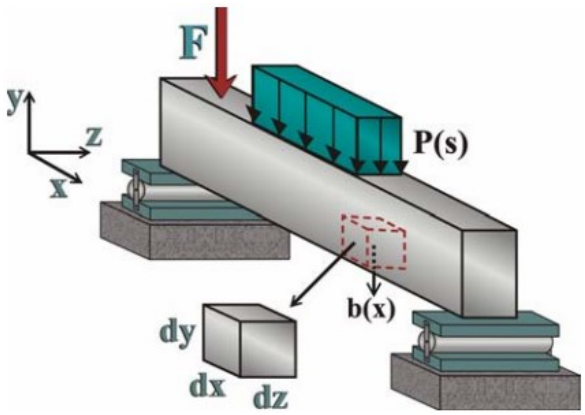

Figura 5. Elemento estrutural sob ação de cargas de naturezas diferentes.

$$\boldsymbol{\Delta_V F} + \int_V \boldsymbol{\Delta(x)_V b(x)} dV + \int_A \boldsymbol{\Delta(s)_V P(s)} dA = \int_V \boldsymbol{\varepsilon(x)_V \sigma(x)} dV \tag{10}$$

onde:

dV – volume do elemento de dimensões infinitesimais;

dA – área de superfície com dimensões infinitesimais;

$P(s)$ – força de superfície;

$b(x)$ – força por unidade de volume;

Δ_V – deslocamentos virtuais pontuais;

$\Delta(x)_V$ – deslocamentos virtuais provenientes das forças de volume;

$\Delta(s)_S$ – deslocamentos virtuais provenientes das forças de superfície;

$\varepsilon(x)_V$ – deformações virtuais;

$\sigma(x)$ – tensões.

O primeiro membro da Equação 10 expressa à energia externa ou trabalho externo provocado pelas ações externas (forças) e o segundo membro, a energia interna do corpo ou a energia de deformação. É importante ressaltar que esta equação permite o desenvolvimento de qualquer elemento finito.

Os deslocamentos nodais da estrutura são obtidos mediante o emprego das condições de contorno na Equação 10 juntamente com a resolução do sistema de equações resultante. Como será apresentado adiante, as mesmas funções utilizadas na determinação da matriz de rigidez e do vetor dos deslocamentos nodais também são utilizadas para interpolar os deslocamentos e, consequentemente, as deformações, tensões e esforços ao longo de cada elemento finito.

Considera-se que o elemento finito seja a viga e haja dois nós, um em cada extremidade. A cada nó associam-se dois deslocamentos: o deslocamento vertical, representado por $v(x)$, e a rotação, tida como $\theta(x)$. Sendo assim, para a aproximação realizada por polinômio de grau três, a função aproximativa dos deslocamentos segundo a técnica dos elementos finitos é ilustrada na Figura 6.

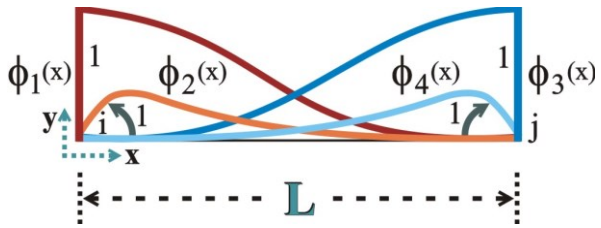

Figura 6. Função aproximativa de deslocamentos segundo o MEF.

O elemento finito desenvolvido com este polinômio possui quatro graus de liberdade, sendo uma translação e uma rotação por nó, sendo a rotação expressa pela derivada primeira da função deslocamento. Este polinômio foi assim escolhido por possuir quatro coeficientes, permitindo-se associar os quatro graus de liberdade nodais do elemento de barra.

O elemento finito desenvolvido com o uso do polinômio de grau cinco possui seis graus de liberdade, sendo três por nó, tendo, além da translação e da rotação, outro grau de

liberdade, referente à derivada segunda da função deslocamento, o que, do ponto de vista matemático, garante a continuidade da curvatura nos nós dos elementos finitos. Dessa forma, a imposição da continuidade não é só da derivada primeira, mas também da derivada segunda da função deslocamento, oferecendo melhores aproximações quando comparadas as geradas pelo polinômio de grau três.

No MEF, a técnica de gerar as funções de aproximação consiste em, depois de escolhido o elemento finito e a função de aproximação, sobre esta se impõe um "deslocamento unitário" sobre um dos seus graus de liberdade mantendo-se os demais nulos, sendo este procedimento realizado para todos os graus de liberdade do elemento ou, consequentemente, para todos os coeficientes da função aproximadora. Dessa forma, as funções de aproximação têm seus coeficientes determinados mediante a aplicação desta metodologia.

As Equações 11 e 12 são as utilizadas para definir as aproximações do MEF. A primeira trata-se da aproximação com polinômios de grau três e a segunda com polinômios de grau cinco.

$$\phi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \tag{11}$$

$$\phi(x) = b + b_1 x + b x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + a_5 x^5 \tag{12}$$

As Equações 13 e 14 apresentam as funções aproximadas para os deslocamentos ($v_{ap}(x)$) ao longo do elemento finito, com uso dos polinômios de graus três e cinco respectivamente.

$$v_{ap}(x) = v_i \phi_1(x) + \theta_i \phi_2(x) + v_j \phi_3(x) + \theta_j \phi_4(x) \tag{13}$$

$$v_{ap}(x) = v_i \phi_1(x) + \theta_i \phi_2(x) + \gamma_i \phi_3(x) + v_j \phi_4(x) + \theta_j \phi_5(x) + \gamma_j \phi_6(x) \tag{14}$$

Nas Equações 13 e 14, v, θ e γ são os graus de liberdade definidos nos nós do elemento finto. Com posse deles, é possível interpolar os deslocamentos e deformações ao longo de cada elemento finito. É importante ressaltar que, como visto anteriormente, as deformações na viga estão relacionadas com a derivada segunda da função deslocamento. Dessa forma, com posse da função aproximadora para os deslocamentos, torna-se possível definir as funções aproximadas para as deformações ao longo dos elementos finitos, assim como expressam as Equações 15 e 16.

$$\varepsilon_{ap}(x) = -y\left(v_i\phi_1''(x) + \theta_i\phi_2''(x) + v_j\phi_3''(x) + \theta_j\phi_4''(x)\right) \quad (15)$$

$$\varepsilon_{ap}(x) = -y\left(v_i\phi_1''(x) + \theta_i\phi_2''(x) + \gamma_i\phi_3''(x) + v_j\phi_4''(x) + \theta_j\phi_5''(x) + \gamma_j\phi_6''(x)\right) \quad (16)$$

As Equações 13, 14, 15 e 16 podem ser escritas matricialmente assim como expressam as Equações 17, 18, 19 e 20.

$$v_{ap}(x) = [\phi_1(x) \quad \phi_2(x) \quad \phi_3(x) \quad \phi_4(x)]\begin{bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$v_{ap}(x) = [\phi_1(x) \quad \phi_2(x) \quad \phi_3(x) \quad \phi_4(x) \quad \phi_5(x) \quad \phi_6(x)]\begin{bmatrix} v_i \\ \theta_{\mathrm{i}} \\ \gamma_i \\ v_{\mathrm{j}} \\ \theta_{\mathrm{j}} \\ \gamma_j \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\varepsilon_{\mathrm{ap}}(\mathrm{x}) = -\mathrm{y}[\phi_1''(x) \quad \phi_2''(x) \quad \phi_3''(x) \quad \phi_4''(x)]\begin{bmatrix} v_i \\ \theta_{\mathrm{i}} \\ v_{\mathrm{j}} \\ \theta_{\mathrm{j}} \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$v_{ap}(x) = -y[\phi_1''(x) \quad \phi_2''(x) \quad \phi_3''(x) \quad \phi_4''(x) \quad \phi_5''(x) \quad \phi_6''(x)]\begin{bmatrix} v_{\mathrm{i}} \\ \theta_{\mathrm{i}} \\ \gamma_i \\ v_{\mathrm{j}} \\ \theta_{\mathrm{j}} \\ \gamma_j \end{bmatrix} \quad (20)$$

Nas Equações 17 e 18, as matrizes que contêm as funções interpoladoras (funções de forma) são denominadas *matrizes das funções de forma* $\mathbf{N(x)}$, que permitem determinar os deslocamentos ao longo do elemento finito ($v_{ap}(x)$) com posse dos deslocamentos nodais $\mathbf{\Delta}$. A equação 21 expressa de forma compacta a relação entre $\mathbf{\Delta}$ e $v_{ap}(x)$.

$$v_{ap}(x) = \mathbf{N(x)\Delta} \quad (21)$$

Nas Equações 19 e 20, as matrizes que contêm as derivadas segundas das funções de forma são denominadas *matrizes deslocamento-deformação* $\mathbf{B(x)}$**,** permitindo-se determinar as deformações ao longo do elemento finito ($\varepsilon_{\mathrm{ap}}(\mathrm{x})$) com posse dos seus deslocamentos nodais. A Equação 22 expressa de forma compacta a relação entre $\mathbf{\Delta}$ e $\varepsilon_{\mathrm{ap}}(\mathrm{x})$.

$$\varepsilon_{ap}(x) = \mathbf{B}(\mathbf{x})\boldsymbol{\Delta} \tag{22}$$

Com o objetivo de se construir a matriz de rigidez e o vetor das forças equivalentes nodais, aplica-se ao PTV (Equação 10) as Equações 21 e 22, resultando na Equação 23.

$$\boldsymbol{\Delta_V F} + \int_V (\boldsymbol{N(x)\Delta_V})\boldsymbol{b(x)}dV + \int_A (\boldsymbol{N(x)\Delta_V})\boldsymbol{P(s)}dA = \int_V (\boldsymbol{B(x)\Delta_V})\boldsymbol{DB(x)\Delta}dV \tag{23}$$

O tensor constitutivo de rigidez **D** na Equação 23 advém da relação constitutiva $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D\varepsilon}$. Ressalta-se que, para o caso das vigas, **D** equivale ao módulo de elasticidade do material, $\boldsymbol{\sigma}$, equivale à tensão normal na flexão e $\boldsymbol{\varepsilon}$ a deformação associada à curvatura ($\varepsilon = -y\frac{d^2v}{dx^2}$).

Colocando-se $\boldsymbol{\Delta}_v$ em evidência na Equação 23, chega-se à Equação 24.

$$\boldsymbol{F} + \int_V \boldsymbol{N(x)b(x)}dV + \int_A \boldsymbol{N(x)P(s)}dA = \left(\int_V \boldsymbol{B(x)DB(x)}dV\right)\boldsymbol{\Delta} \tag{24}$$

O primeiro membro da Equação 24, na forma matricial, representa o vetor das forças equivalentes nodais do elemento ($\boldsymbol{F_{eq}}$), e o segundo membro, o produto da matriz de rigidez do elemento finito ($\boldsymbol{K_e}$) pelo vetor de deslocamentos nodais ($\boldsymbol{\Delta}$), como indicado nas Equações 25 e 26.

$$\boldsymbol{F_{eq}} = \boldsymbol{F} + \int_V \boldsymbol{N(x)b(x)}dV + \int_A \boldsymbol{N(x)P(s)}dA \tag{25}$$

$$\boldsymbol{K_e} = \int_V \boldsymbol{B(x)DB(x)}dV \tag{26}$$

As Equações 25 e 26 permitem determinar a matriz de rigidez e o vetor das forças nodais equivalentes para qualquer elemento finito.

Como aqui não são consideradas as forças de campo, o termo contendo ***b(x)*** na Equação 25 é desprezado (Equação 27).

$$\boldsymbol{F_{eq}} = \boldsymbol{F} + \int_0^L \boldsymbol{N(x)^T}P(x)dx \tag{27}$$

Para o problema de viga, independentemente da função interpolativa adotada, a matriz de rigidez, em notação matricial, fica expressa pela Equação 28.

$$\boldsymbol{K_e} = \int_0^L EI\boldsymbol{B(x)}^T \cdot \boldsymbol{B(x)}dx \tag{28}$$

Aproximações pelo polinômio de grau três

As funções de forma segundo o Método os Elementos Finitos com o uso do polinômio de grau três são apresentadas na Equação 29.

$$\begin{cases} \phi_1(0) = 1 \\ \phi_1{}'(0) = 0 \\ \phi_1(L) = 0 \\ \phi_1{}'(L) = 0 \end{cases} \rightarrow \quad \phi_1(x) = \frac{2}{h^3}x^3 - \frac{3}{h^2}x^2 + 1$$

$$\begin{cases} \phi_2(0) = 0 \\ \phi_2{}'(0) = 1 \\ \phi_2(L) = 0 \\ \phi_2{}'(L) = 0 \end{cases} \rightarrow \quad \phi_2(x) = \frac{1}{h^2}x^3 - \frac{2}{h}x^2 + x$$

$$\begin{cases} \phi_3(0) = 0 \\ \phi_3{}'(0) = 0 \\ \phi_3(L) = 1 \\ \phi_3{}'(L) = 0 \end{cases} \rightarrow \quad \phi_3(x) = -\frac{2}{h^3}x^3 + \frac{3}{h^2}x^2$$

$$\begin{cases} \phi_4(0) = 0 \\ \phi_4{}'(0) = 0 \\ \phi_4(L) = 0 \\ \phi_4{}'(L) = 1 \end{cases} \rightarrow \quad \phi_4(x) = \frac{1}{h^2}x^3 - \frac{1}{h}x^2 \tag{29}$$

A matriz de rigidez para esta aproximação é obtida substituindo-se as Equações 29 na Equação 28, assim como expressa a Equação 30.

$$\boldsymbol{K_e} = EI \int_0^L \left(\begin{bmatrix} \phi_2''(x) \\ \phi_2''(x) \\ \phi_3''(x) \\ \phi_4''(x) \end{bmatrix} [\phi_1''(x) \quad \phi_2''(x) \quad \phi_3''(x) \quad \phi_4''(x)] \right) dx \tag{30}$$

Para o carregamento linearmente distribuído do problema modelo ($q(x) = c^{te}$), o vetor das forças nodais equivalentes fica expresso pela Equação 31.

$$\boldsymbol{F_{eq}} = q \int_0^L \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \\ \phi_3(x) \\ \phi_4(x) \end{bmatrix} dx \tag{31}$$

Aproximações pelo polinômio de grau cinco

As funções de forma com o uso do polinômio de grau cinco segundo o MEF são apresentadas na Equação 32.

$$\begin{cases} \phi_1(0) = 1 \\ \phi_1'(0) = 0 \\ \phi_1''(0) = 0 \\ \phi_1(L) = 0 \\ \phi_1'(L) = 0 \\ \phi_1''(L) = 0 \end{cases} \rightarrow \quad \phi_1(x) = \frac{-6}{L^5}x^5 + \frac{15}{L^4}x^4 + \left(\frac{-10}{L^3}\right)x^3 + 1$$

$$\begin{cases} \phi_2(0) = 0 \\ \phi_2'(0) = 1 \\ \phi_2''(0) = 0 \\ \phi_2(L) = 0 \\ \phi_2'(L) = 0 \\ \phi_2''(L) = 0 \end{cases} \rightarrow \quad \phi_2(x) = \frac{-3}{L^4}x^5 + \frac{8}{L^3}x^4 + \left(\frac{-6}{L^2}\right)x^3 + x$$

$$\begin{cases} \phi_3(0) = 0 \\ \phi_3'(0) = 0 \\ \phi_3''(0) = 1 \\ \phi_3(L) = 0 \\ \phi_3'(L) = 0 \\ \phi_3''(L) = 0 \end{cases} \rightarrow \quad \phi_3(x) = \frac{-1}{(2L^3)}x^5 + \frac{3}{(2L^2)}x^4 \frac{3}{-(2L)}x^3 + \frac{x^2}{2}$$

$$\begin{cases} \phi_4(0) = 0 \\ \phi_4'(0) = 0 \\ \phi_4''(0) = 0 \\ \phi_4(L) = 1 \\ \phi_4'(L) = 0 \\ \phi_4''(L) = 0 \end{cases} \rightarrow \quad \phi_4(x) = \frac{6}{L^5}x^5 + \left(\frac{-15}{L^4}\right)x^4 + \frac{10}{L^3}x^3$$

$$\begin{cases} \phi_5(0) = 0 \\ \phi_5'(0) = 0 \\ \phi_5''(0) = 0 \\ \phi_5(L) = 0 \\ \phi_5'(L) = 1 \\ \phi_5''(L) = 0 \end{cases} \rightarrow \quad \phi_5(x) = \frac{-3}{L^4}x^5 + \frac{7}{L^3}x^4 + \left(\frac{-4}{L^2}\right)x^3$$

$$\begin{cases} \phi_6(0) = 0 \\ \phi_6{}'(0) = 0 \\ \phi_6{}''(0) = 0 \\ \phi_6(L) = 0 \\ \phi_6{}'(L) = 1 \\ \phi_6{}''(L) = 0 \end{cases} \rightarrow \quad \phi_6(x) = \frac{1}{(2L^3)}x^5 + \frac{(-1)}{(2L^2)}x^4 + \frac{1}{(2L)}x^3 \tag{32}$$

A matriz de rigidez para esta aproximação é obtida substituindo-se as Equações em 32 na Equação 28, assim como expressa a Equação 33.

$$\boldsymbol{K_e} = EI \int_0^L \left(\begin{bmatrix} \phi_1''(x) \\ \phi_2''(x) \\ \phi_3''(x) \\ \phi_4''(x) \\ \phi_5''(x) \\ \phi_6''(x) \end{bmatrix} [\phi_1''(x) \quad \phi_2''(x) \quad \phi_3''(x) \quad \phi_4''(x) \quad \phi_5''(x) \quad \phi_6''(x)] \right) dx \tag{33}$$

Para o carregamento linearmente distribuído do problema modelo ($q(x) = c^{te}$), o vetor das forças nodais equivalentes fica expresso pela Equação 34.

$$\boldsymbol{F_{eq}} = q \int_0^L \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \\ \phi_3(x) \\ \phi_4(x) \\ \phi_5(x) \\ \phi_6(x) \end{bmatrix} dx \tag{34}$$

Resolução do problema modelo

A Equação 35 apresenta o sistema de equações proveniente da aproximação pelo polinômio de grau três, considerando-se as condições de contorno do problema.

$$\begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{q.L^2}{12} \\ -\frac{q.L^2}{12} \end{bmatrix} \tag{35}$$

Resolvendo-se o sistema em 35 e substituindo a sua solução na Equação 18 juntamente com os valores numéricos das variáveis estruturais do problema, chega-se a

função aproximada dos deslocamentos para o polinômio de grau três, assim como expressa a Equação 36.

$$v_{ap}(x) = -\frac{1}{10368}x^2 + \frac{25}{1296}x \tag{36}$$

A Figura 7 ilustra o gráfico das funções $v_{ap}(x)$ (Equação 36) e exata $v(x)$ (Equação 8).

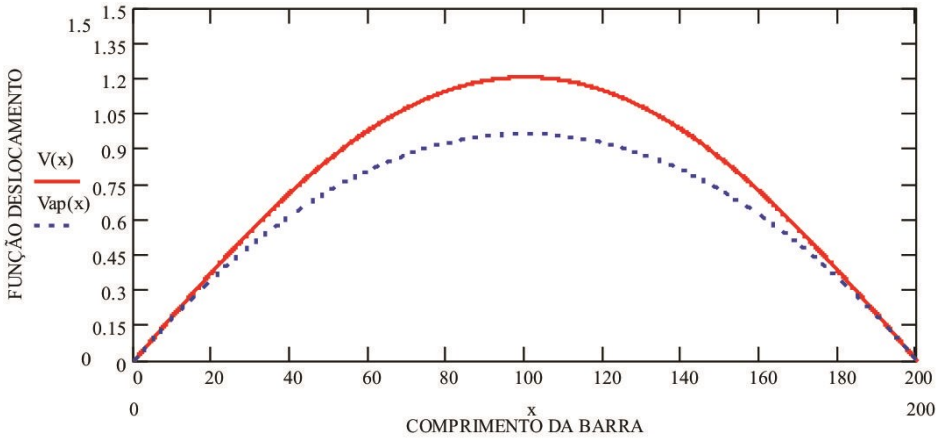

Figura 7. Comparação entre a função de deslocamento do problema via solução analítica e segundo o elemento finito com quatro graus de liberdade (aproximação pelo polinômio de grau três).

A Equação 37 apresenta o sistema de equações proveniente da aproximação pelo polinômio de grau cinco, considerando-se as condições de contorno do problema.

$$\begin{bmatrix} \frac{192EI}{35L} & \frac{11EI}{35} & \frac{108EI}{35L} & -\frac{4EI}{35} \\ \frac{11EI}{35} & \frac{3EIL}{35} & \frac{4EI}{35} & \frac{1EIL}{70} \\ \frac{108EI}{35L} & \frac{4EI}{35} & \frac{192EI}{35L} & -\frac{11EI}{35} \\ -\frac{4EI}{35} & \frac{1EIL}{70} & -\frac{11EI}{35} & \frac{3EIL}{35} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \gamma_1 \\ \theta_1 \\ \gamma_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{10}.q.L^2 \\ \frac{1}{120}.q.L^3 \\ \frac{-1}{10}.q.L^2 \\ \frac{1}{120}.q.L^2 \end{Bmatrix} \tag{37}$$

Resolvendo-se o sistema em 37 e substituindo a sua solução na Equação 18 juntamente com os valores numéricos das variáveis estruturais do problema, chega-se a função aproximada dos deslocamentos para o polinômio de grau cinco, assim como expressa a Equação 38.

$$v_{ap}(x) = \frac{1}{414720000}.x^4 - \frac{1}{1036800}.x^3 + \frac{25}{1296}.x \tag{38}$$

A Figura 8 ilustra as funções $v_{ap}(x)$ (Equação 38) e exata $v(x)$ (Equação 8).

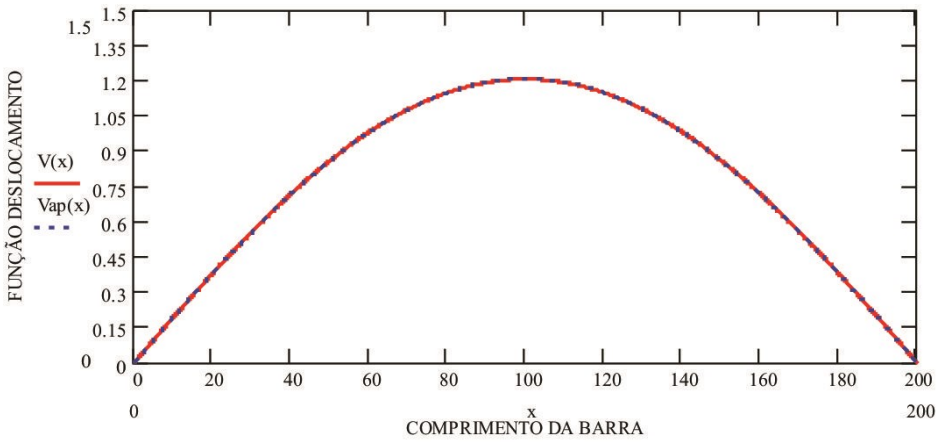

Figura 8. Comparação entre a função de deslocamento do problema via solução analítica e segundo o elemento finito com seis graus de liberdade (aproximação pelo polinômio de grau cinco).

Para avaliar a eficiência de ambas as aproximações utilizou-se a medida de erro relativo, expressa pela Equação 39.

$$Erro(\%) = 100\frac{\int_0^L |v(x) - v_{ap}(x)|dx}{\int_0^L |v(x)|dx} \tag{39}$$

Para a aproximação do elemento finito com quatro graus de liberdade, foi alcançado o erro de 16,66667%. Em contrapartida, para a aproximação do elemento finito com seis graus de liberdade o erro encontrado foi de $3{,}25 \cdot 10^{-14}$%, sendo praticamente nulo.

Conclusão

O elemento finito desenvolvido com seis graus de liberdade mostrou ser mais preciso, assim como esperado, que o obtido com o de quatro graus de liberdade, tendo em vista a necessidade de dois elementos finitos com dois graus de liberdade por nó para a obtenção de resultados equivalentes a um único elemento finito com seis graus de liberdade, ou seja, para

melhorar os resultados dos deslocamentos com o uso do elemento finito de quatro graus de liberdade seria necessário um refinamento da malha.

A função de deslocamento para o polinômio interpolador do quinto grau apresentou excelente resultado. Foi comprovado que o desenvolvimento do elemento finito com o uso deste polinômio interpolador garantiu a continuidade na curvatura e que a sua eficiência é superior ao elemento finito que emprega o polinômio interpolador de grau três, visto que conduziu ao valor da solução exata em deslocamentos para o caso de carga uniforme.

Em adição a estas conclusões, este trabalho poderá ser utilizado como um material didático, visto que apresenta duas formulações em MEF (para três e cinco graus de liberdade) através do Princípio dos Trabalhos Virtuais para elementos de viga sujeitos à flexão que podem auxiliar no ensino e aprendizagem de formulações numéricas via elementos finitos.

Bibliografia

ALVARENGA, R. C. S. S.; ANTUNES, H. M. C. C. **Otimização de treliças.** Congresso Ibero Latino-Americano Sobre Métodos Computacionais para Engenharia, 15. Belo Horizonte, MG. Anais, p. 1699-1708, 1994.

CHEUNG, A. B.; LINDQUIST, M.; CALIL, C. J. **Calibração de propriedades elásticas de uma placa ortótropa utilizando algoritmos genéticos.** Revista Sul-americana de Engenharia Estrutural. Universidade de Passo Fundo. Mato Grosso do Sul. p. 74-92, 2004.

CHRISTOFORO, A. L. **Influência das irregularidades da forma em peças de madeira na determinação do módulo de elasticidade longitudinal.** Tese de Doutorado, Escola de Engenharia de São Carlos, USP, São Carlos, SP, 2007.

GÓES, J. L. N. **Modelos teóricos para o dimensionamento de pontes com tabuleiro multicelular de madeira protendida**. XXXI Jornadas Sud-americanas de Ingeniería Estructural. Universidad Nacional de Cuyo. Mendonça. Argentina. Anais, CD-ROM, 2004.

MASCIA, N. T. **Considerações a respeito da anisotropia da madeira.** Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, USP, São Carlos, SP, 1991.

OÑATE, E. **Cálculo de Estructuras por el Método de Elementos Finitos – Análisis estático lineal.** Centro Internacional de Métodos Numéricos em Ingeniería, 1995.

RIGO, E. **Métodos de otimização aplicados à análise de estruturas.** Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, USP, São Carlos, SP, 1999.